一类反 Smarandache 周期行列式

段卫国，路玉麟
（渭南师范学院 数学与信息科学学院，陕西 渭南 714000）

摘　要：定义了一类新的反 Smarandache 周期行列式，并利用初等数论的方法和行列式的性质，对这类行列式进行了研究，给出了它们的通项公式.

关键词：反周期；行列式；通项公式
中图分类号：O156　　文献标志码：A　　文章编号：1009—5128（2012）02—0017—04
收稿日期：2011—05—12
基金项目：陕西省教育厅科研资助项目（2010JK538）；渭南师范学院研究生资助项目（11YKZ030）
作者简介：段卫国（1981—），男，陕西临潼人，渭南师范学院数学与信息科学学院讲师，硕士. 研究方向：数论.

0　引言及结论

在文献[1-5]中 Murthy 等人定义了一类 Smarandache 周期行列式并计算了其通项公式，在本文中，我们将定义一类新的反 Smarandache 周期行列式，并利用行列式的基本性质，研究并给出它的通项公式.

定义 1　对于任何正整数 n，有 $n \times n$ 行列式 $FD(n)$，称为 n 次对称反 Smarrandache 周期行列式. 其定义如下：

$$FD(n)=\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ 1 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & n & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

定义 2　对于任何正整数 n，设 a,d 为复数，有 $n \times n$ 行列式序列 $FAD(n:a,d)$，称为关于数 (a,d) 的 n 次算数对称反 Smarrandache 周期行列式. 其定义如下：

$$FAD(n:a,d)=\begin{vmatrix} a+(n-1)d & a+(n-2)d & a+(n-3)d & \cdots & a \\ a & a+(n-1)d & a+(n-2)d & \cdots & a+d \\ a+d & a & a+(n-1)d & \cdots & a+2d \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-2)d & a+(n-3)d & a+(n-4)d & \cdots & a+(n-1)d \end{vmatrix}$$

定义 3　对于任何正整数 n，$n \times n$ 行列式序列 $FSD(n)$，称为 n 次双对称反 Smarrandache 周期行列式. 其定义如下：

$$FSD(n)=\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-1 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ n-2 & n-1 & n & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

定义 4　对于任何正整数 n，设 a,d 为复数，有 $n \times n$ 行列式序列 $FSAD(n:a,d)$，称为关于数 (a,d) 的 n 次算数双对称反 Smarrandache 周期行列式. 其定义如下：

$$FSAD(n:a,d)=\begin{vmatrix} a+(n-1)d & a+(n-2)d & a+(n-3)d & \cdots & a \\ a+(n-2)d & a+(n-1)d & a+(n-2)d & \cdots & a+d \\ a+(n-3)d & a+(n-2)d & a+(n-1)d & \cdots & a+2d \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a+d & a+2d & \cdots & a+(n-1)d \end{vmatrix}$$

本文在 Murthy 和 A. A. K. Majumdar 等人的研究基础上，利用初等数论的研究方法结合行列式的相关性质对以上新的行列式进行了研究，得到了以下结论：

定理 对于任何正整数 n，设 a，d 为复数，则有

$$FD(n)=n^{n-1}\frac{n+1}{2} \tag{1}$$

$$FAD(n:a,d)=\left(a+\frac{n-1}{2}d\right)(nd)^{n-1} \tag{2}$$

$$FSD(n)=2^{n-2}(n+1) \tag{3}$$

$$FSAD(n:a,d)=\left[a+\frac{n-1}{2}d\right](2d)^{n-1} \tag{4}$$

1 相关引理

引理 1 当 $n>2$ 时，有 $n\times n$ 行列式

$$D(a)=\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}=(a-1)^{n-1}(a+n-1)$$

引理 2 当 $n>2$ 时，有 $n\times n$ 行列式

$$A_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}=2^{n-1}$$

引理 1、引理 2 的证明见文献[2].

2 定理证明

对于(1)式从第 n 列开始，将后一列的 -1 倍加到前一列，保持最后一列不变，使得

$$FD(n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1-n & 1 & 1 & \cdots & 2 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

然后第 2 行到第 n 行全部加到第 1 行，再把第 1 行展开，根据引理 1，即可得到结论，即

$$FD(n)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n(n+1)}{2} \\ 1-n & 1 & 1 & \cdots & 2 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}(1-n-1)^{n-2}(1-n+n-2)=n^{n-1}\frac{n+1}{2}.$$

对于(2)式采用与(1)式相同的办法证明，即从第 n 列开始，将后一列的 -1 倍加到前一列，保持最后一列不变，然后再将第 2 行到第 n 行全部加到第 1 行，之后按第 1 行展开，根据引理 1，即可得到结论，即

$$FAD(n:a,d)=\begin{vmatrix} d & d & d & \cdots & a \\ (1-n)d & d & d & \cdots & a+d \\ d & (1-n)d & d & \cdots & a+2d \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d & d & d & \cdots & a+(n-1)d \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & na+\frac{n(n-1)}{2}d \\ (1-n)d & d & d & \cdots & a+2d \\ d & (1-n)d & d & \cdots & a+3d \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d & d & d & \cdots\cdots & a+(n-1)d \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\left(na+\frac{n(n-1)}{2}d\right)d^{n-1}\begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\left(na+\frac{n(n-1)}{2}d\right)d^{n-1}(1-n-1)^{n-2}(1-n+n-2)$$

$$=(nd)^{n-1}\left(a+\frac{n-1}{2}d\right)$$

对于(3)式只要从第 2 行开始，将上一行的 -1 倍加到当前行，保持第一行不变，再将最后一列加到第一列，即

$$FSD(n)=\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} n+1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

再根据引理 2，即可得到结论. 即

$$FSD(n) = (n+1)2^{(n-1)-1} = (n+1)2^{n-2}.$$

对于(4)式的证明采用与(3)式相同的办法，只要从第 2 行开始，将上一行 −1 倍的加到当前行，保持第一行不变，再将最后一列加到第一列，最后根据引理 2 就可得到结论. 过程如下：

$$FSAD(n:a,d) = \begin{vmatrix} a+(n-1)d & a+(n-2)d & a+(n-3)d & \cdots & a \\ -d & d & d & \cdots & d \\ -d & -d & d & \cdots & d \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -d & -d & -d & \cdots & d \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2a+(n-1)d & a+(n-2)d & a+(n-3)d & \cdots & a \\ 0 & d & d & \cdots & d \\ 0 & -d & d & \cdots & d \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -d & -d & \cdots & d \end{vmatrix}$$

$$= (2a+(n-1)d)\begin{vmatrix} d & d & \cdots & d \\ -d & d & \cdots & d \\ \cdots & \cdots & \cdots & d \\ -d & -d & \cdots & d \end{vmatrix}$$

$$= (2a+(n-1)d)d^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2a+(n-1)d)d^{n-1}2^{(n-1)-1}$$

$$= \left[a + \frac{n-1}{2}d\right](2d)^{n-1}.$$

参考文献：

[1] Amarnath Murthy. Smarandache Determinant Sequence [J]. Smarandache Notions Journal, 2001, (12): 275 − 278.

[2] A. A. K. Majumdar. On some Smarandache determinant sequences [J]. Scientia Magna, 2008, 4(2): 80 − 95.

[3] Maohua L. Two classes of Smarandache determinants [J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 20 − 25.

[4] 杨长恩. 论两类 Smarandache 行列式的推广 [J]. 咸阳师范学院学报, 2010, 25(4): 1 − 3.

[5] 杨长恩. Fibonacci 数列与对角型行列式 [J]. 咸阳师范学院学报, 2007, 22(4): 3 − 5.

【责任编辑　牛怀岗】

A Class of Anti Smarandache Cycle Determinant

DUAN Wei-guo, LU Yu-lin

(School of Mathematics and Information Science, Weinan Normal University, Weinan 714000, China)

Abstract: In this paper, we defined a new class of anti Smarandache cycle determinants, and using the methods of the nature elementary theory and determinant properties, we studied these determinants, and gave the general term formula.

Key words: anti cycle; determinant; general term formula